(Dienstag, 29. 05. 2018)

5. Kapitel

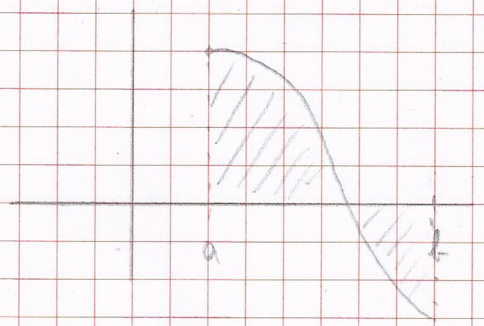
Funktionen; Grenzwerte, Stetigkeit; Diff-barkeit

Integrierbarkeit.

Problem: Beschreibe $\int_a^b f(x)\,dx$ (diese reelle Zahl)

als „Fläche" F zwischen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

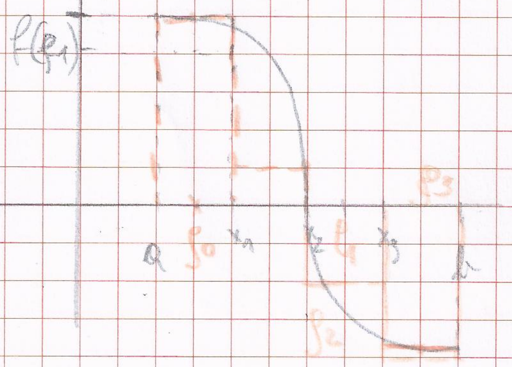
und der x-Achse.



Ansatz: Zerlege $[a,b]$ in Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$,

$j = 0, \ldots, n-1$

$a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$, $n \in \mathbb{N}$



und beschreibe näherungsweise

F als

$$\sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{f(\xi_j)}_{<0,=0,>0} \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{>0}$$

Plausibel: für $n \to \infty$ (Teilintervalle sehr klein

wählen) gilt,

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

(Integral ist ein Grenzwert)

für jede Wahl von $\xi_i \in [x_{j+1}, x_j]$

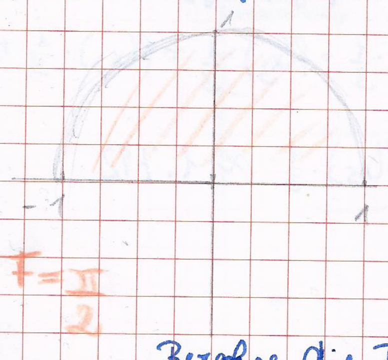
(Riemann Summen für integrierbare

Funktionen)

Ziele: Welche Funktionen sind integrierbar?

Rechenregeln für Integrale

Beispiele (Numerische Integration und die Zahl π)



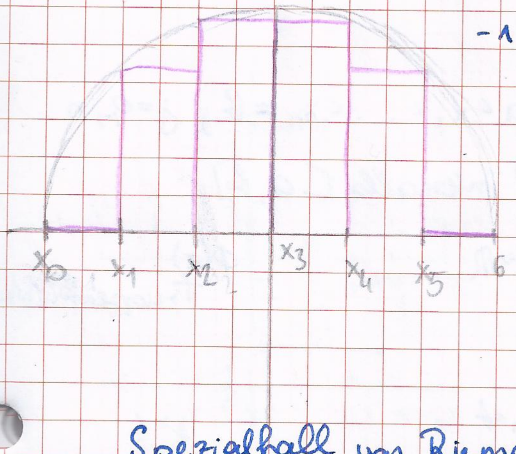
Kreis: $x^2+y^2 = 1 = r^2 \iff y^2 = 1-x^2$

(um (0|0) mit Radius 1) $\iff y = \pm \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geq 0}, \; x \in [-1,1]$

Berechne die Fläche des Halbkreises mit Hilfe von

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Wahl von ξ_j und x_j, $j = 0, \ldots, 6$.



$$-1 = x_0 < x_1 = -\frac{2}{3} < x_2 = -\frac{1}{3} < x_3 = 0 < x_4 = \frac{1}{3} < x_5 = \frac{2}{3} < x_6 = 1$$

Spezialfall von Riemann-Summen,

Darboux Summen:

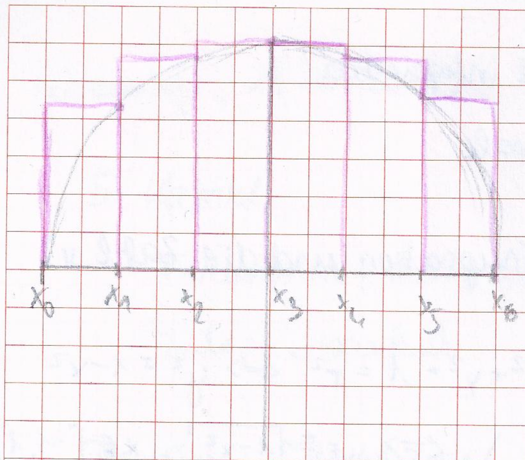
untere Darboux Summe

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \approx \sum_{j=0}^{5} \underbrace{\inf\{f(x): x \in [x_j, x_{j+1}]\}}_{\text{Wahl von } \xi_j} (x_{j+1}, x_j)$$

$$= f(-1) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) +$$
$$f(x_4)(x_4 - x_3) + f(x_5)(x_5 - x_4) + f(x_6)(x_6 - x_5)$$

kein Abschreibfehler gehört so

$$= 0 \cdot \frac{1}{3} + \sqrt{1-(-\tfrac{2}{3})^2} \cdot \frac{1}{3} + \sqrt{1-(-\tfrac{1}{3})^2} \cdot \frac{1}{3} \ldots \approx 1{,}125$$



Obere Darboux Summe

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \approx \sum_{j=0}^{5} \sup\{f(x) : x\in[x_j \}$$

$$\cdot (x_{j+1}-x_j) =$$

$$f(x_1)\cdot\frac{1}{3} + f(x_2)\cdot\frac{1}{3} + f(x_3)\cdot\frac{1}{3} + f(x_3)\cdot\frac{1}{3} +$$

$$f(x_4)\cdot\frac{1}{3} + f(x_5)\cdot\frac{1}{3} \approx 1.792\ldots$$

Also $1,125.. \leq \frac{\pi}{2} \leq 1,792..$

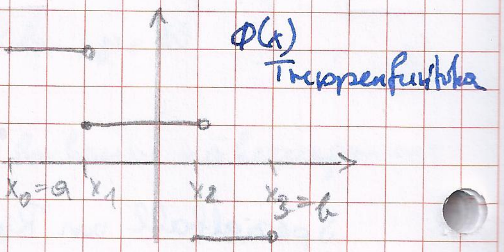
Um diese Näherung zu verbessern, wähle eine feinere Zerlegung (d.h. $n \to \infty$) von $[-1,1]$.

Flächen von Rechtecken als Integrale von Treppenfunktionen

5.1. Definition

(i) Punkte x_j, sodass $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, $j = 0,..,n$.
bilden eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$

(ii) Eine Abbildung $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$
heißt Treppenfunktion auf
der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$
, sodass



$$\forall j \in \{0,\ldots,n-1\} : \exists c_j \in \mathbb{R} : \forall y \in [x_j, x_{j+1}) : \phi(y) = c_j$$

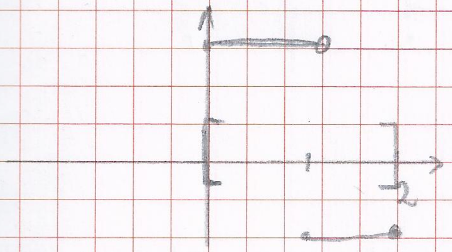
5.2. Definition

Sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion auf der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Das Integral von ϕ über $[a,b]$ ist die reelle Zahl
$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\phi(\xi_j)}_{c_j}(x_{j+1}-x_j)$$
für alle $\xi_j \in [x_{j+1}, x_j)$

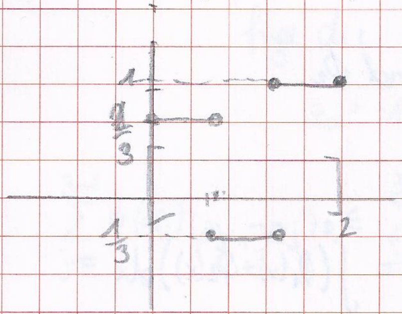
Bemerkungen + Beispiele

(i) Summe von Treppenfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 ist wieder eine Treppenfunktion.



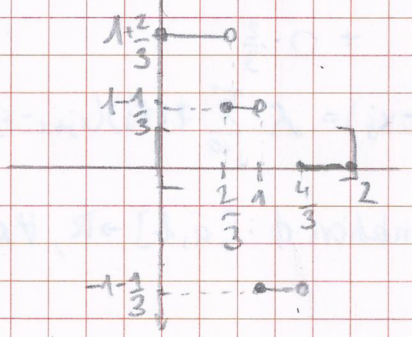
ϕ_1 auf der Zerlegung $x_0=0<x_1=1<x_2=2$

+



ϕ_2 auf der Zerlegung $x_0=0<x_1=\frac{2}{3}<x_2=\frac{4}{3}<x_3=2$

=



$\phi_1+\phi_2$ auf der Zerlegung

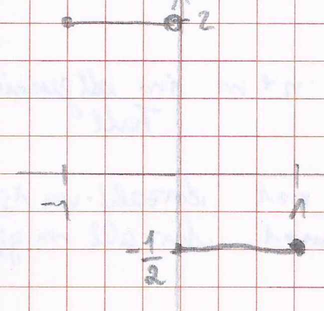
$x_0=0<x_1=\frac{2}{3}<x_2=1<x_3=\frac{4}{3}<x_4=2$

(ii) $\int_a^b \phi(x)dx$ für $\phi:[a,b]\to R$

Treppenfunktion ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung.

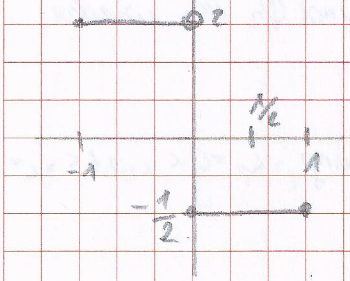
(Zerlegung ist so gewählt, dass ϕ eine Treppenfunktion ist).

$$\int_{-1}^{1}\phi(x)dx = 2\cdot 1 + -\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$



$x_0=-1,<x_1=0<x_3=1$

andere Zerlegung



$$\int_{-1}^{1} \phi(x)\,dx = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$x_0 = -1 < x_1 = 0 < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = 1$

(iii) $\int_a^b \phi_1(x)\,dx + \int_a^b \phi_2(x)\,dx = \int_a^b (\phi_1(x) + \phi_2(x))\,dx$,

für Treppenfunktionen ϕ_1 und ϕ_2.

zB ϕ_1, ϕ_2 aus (i)

$$\underbrace{\int_0^2 \phi_1(x)\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_0^2 \phi_2(x)\,dx}_{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3}} = \int_0^2 (\phi_1(x) + \phi_2(x))\,dx =$$

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(-1 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3}$$

(iv) $\int_a^b (\lambda \phi(x))\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda \phi(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \phi(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) =$

$\lambda \int_a^b \phi(x)\,dx$ für jede Treppenfunktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(v) Zwei Integrale vergleichen

$$\underbrace{\int_a^b \phi(x)\,dx}_{\sum_{j=0}^{n-1} \phi(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)} \le \underbrace{\int_a^b \psi(x)\,dx}_{\sum_{j=0}^{m-1} \psi(\beta_j)(y_{j+1} - y_j)}$$, falls $\phi(x) \le \psi(x)$ $\forall x \in [a,b]$

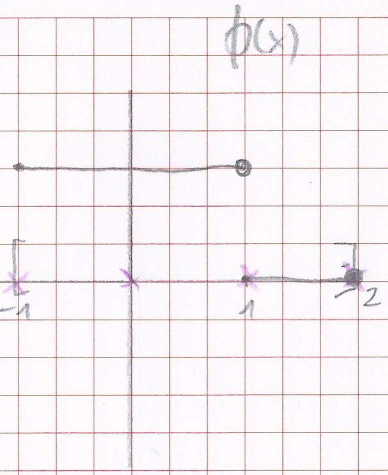
ϕ ist definiert auf $a = x_0 < \ldots < x_n = b$

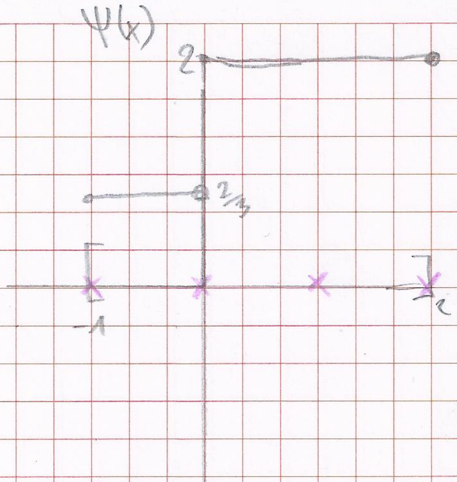
ψ ist definiert auf $a = y_0 < \ldots < y_m = b$

$n \neq m$ im allgemeinen Fall

$n+1$ Anzahl von x_j's
$m+1$ Anzahl von y_j's

z.B.





$x_0=-1<x_1=1<x_2=2$ $y_0=-1<y_1=0<y_2=2$

füge die Zerlegung zusammen

$z_0=-1<z_1=0<z_2=1<z_3=2$

$$\sum_{j=0}^{3-1}\phi(\alpha_j)(z_{j+1}-z_j)\le\sum_{j=0}^{3-1}\psi(\gamma_j)(z_{j+1}-z_j)$$

auf jedem Teilintervall $[z_j, z_{j+1}]$ ist $\phi(x)\le\psi(x)$